Union des professeurs de physique et de chimie

Cryptage du son et traitement numérique

par **Hervé IDDA**
Lycée Paul Cézanne - 13090 Aix-en-Provence
h.idda@caramail.com

RÉSUMÉ

Cet article propose, par une approche déductive, de démonter le mécanisme de cryptage du son.

Après une brève introduction sur les notions indispensables, l'examen par analyse spectrale des sons émis par les télévisions cryptée et non cryptée nous montre le principe utilisé pour le codage. Ensuite, la technique de modulation est abordée d'un point de vue mathématique, puis illustrée par un logiciel de traitement numérique. Celui-ci permet la recherche d'un protocole de décodage simple et facilement réalisable. C'est au cours de ce travail que seront mis en évidence les limites du traitement numérique du signal, ainsi que certains aspects de la transmission et de la formation de l'image à la télévision. Pour finir, quelques questions pratiques sont abordées afin de montrer que les choix techniques utilisés dépendent aussi bien de considérations physiologiques que technologiques.

L'utilisation d'un logiciel de traitement du son se révèle être un outil formidable pour aborder un grand nombre de thèmes. Le côté ludique permet d'adopter une stratégie de recherche où chaque hypothèse peut être vérifiée très rapidement de manière visuelle ou auditive, et ce, quel que soit le niveau des étudiants.

INTRODUCTION

Tzzzzz, tzzzzz : qui ne s'est pas retrouvé un jour à entendre ce son crypté en se demandant : C'est de la magie ? Ou alors, c'est encore un de ces systèmes de cryptage basés sur les nombres premiers dont seuls les mathématiciens ont le secret ? Et bien, j'aurai envie de répondre : Non, c'est juste de la physique !

Cerise sur le gâteau, c'est en plus de la physique que l'on peut aborder dès le lycée avec des outils dont nos élèves entendent toujours parler et rêvent souvent d'utiliser : le traitement numérique du son.

Cette association entre informatique et cryptage crée un cocktail captivant qui permet, à nous professeurs, d'introduire ou de développer de nombreux thèmes allant des filtres à l'analyse de Fourier ; évitant, ainsi, d'entendre par moment le fameux : Mais à quoi cela peut-il bien servir ?

Comme il s'agit d'étudier du son, autant utiliser des outils conçus pour. Il suffit de se pencher une fois sur la question, pour découvrir un univers pléthorique où se côtoient de nombreux logiciels spécifiques. Devant la profusion, lequel choisir ? Il y a autant de réponses que de besoins, mais dans notre cas, le choix s'est porté sur GoldWave en raison de ses capacités de calcul et de son ergonomie. Ce petit logiciel est un shareware (1) créé par Chris S. CRAIG disponible sur `http://www.goldwave.com` (*cf.* annexe 1).

Cet article n'est pas un mode d'emploi, seules quelques fenêtres de la version 4.26 sont présentées. L'intérêt, ici, est de montrer ce que peut apporter l'utilisation de tels programmes dans notre enseignement. Certains points théoriques ont été volontairement passés sous silence ou grandement simplifiés afin de rendre cet article autonome et accessible à tous. Le nombre de notions abordées ainsi que leurs conséquences constituent certainement la meilleure des motivations pour approfondir.

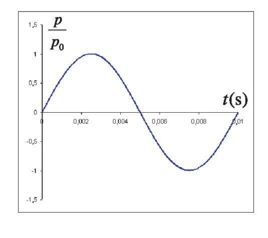
1. NOTIONS THÉORIQUES INDISPENSABLES

Dans un premier temps, il faut rappeler quelques bases utiles pour la compréhension de cet article. Il ne s'agit pas, bien sûr, de refaire les théories complètes de l'analyse spectrale, des filtres ou du traitement du signal (pour cela, voir les références bibliographiques en fin d'article). Nous allons donc aborder ces différents points afin de poser les bases de l'étude de manière plus illustrée…

1.1. Le son et l'oreille

1.1.1. Le son

Dans l'air, le son est une onde résultant de la propagation d'une surpression p.



On parle de son pur si la perturbation p en un point M donné varie de manière sinusoïdale en fonction du temps, soit $p(M,t) = p_0 \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$ avec : p_0 l'amplitude de la surpression (en Pa) et $f = \frac{1}{T}$ la fréquence (en Hz).

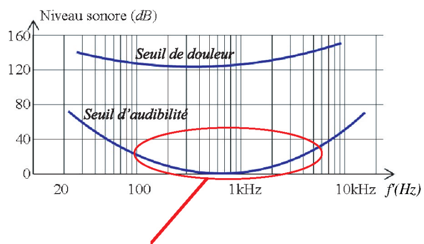
(1) Shareware (français : Partagiciel) : Logiciel diffusé massivement dont on ne paiera le prix que si on l'utilise régulièrement. Formule d'essai avant achat.

Remarques :

– Chaque note de musique est un son pur caractérisé par sa fréquence *f*. Par exemple, la note la_3 correspond à une fréquence $f = 440$ Hz.
– Plus la surpression acoustique est grande et plus le son est perçu comme fort.

1.1.2. L'oreille

L'oreille est un récepteur sonore capable de transformer les signaux acoustiques en influx nerveux pour le cerveau qui se charge de l'interprétation.



Pour des raisons physiologiques, l'oreille ne peut entendre que les sons dont les fréquences *f* sont comprises entre 20 Hz et 20 kHz. On parle d'infrason ou d'ultrason quand les fréquences sont respectivement plus petites que 20 Hz et plus grandes que 20 kHz.

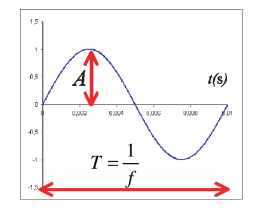
Sur la figure, on remarque facilement que l'oreille humaine est particulièrement sensible entre 100 et 10 kHz avec un optimum situé autour de 1 kHz.

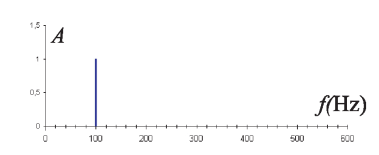
1.2. Analyse spectrale du son

1.2.1. Spectre d'un son pur

Comme nous l'avons vu, à un son pur correspond un signal sinusoïdal. Pour le caractériser, nous avons besoin de deux informations : l'amplitude *A* et la fréquence *f*.

La représentation fréquentielle de ces deux caractéristiques donne le spectre du son étudié. Dans notre exemple, il s'agit d'un son pur de fréquence $f = 100$ Hz et d'amplitude relative $A = 1$.

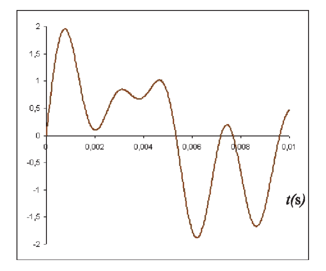




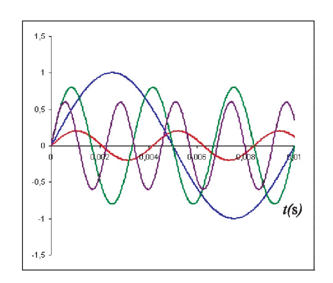
1.2.2. Spectre d'un son complexe

Cette représentation fréquentielle peut sembler inutile dans le cas d'un son pur, mais nous allons voir tout son intérêt pour les sons complexes.

En effet, un son complexe est constitué de plusieurs sons purs. La représentation temporelle de ces différents sons rend très rapidement le graphique illisible.



Représentation d'un son complexe

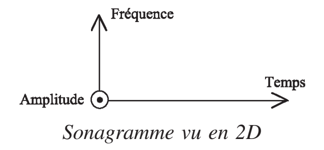


Représentation des quatre sons purs constituant le signal

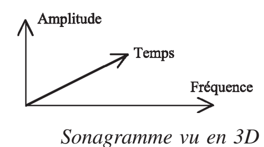
On remarque qu'avec quatre sinusoïdes, il est déjà difficile de discerner les amplitudes et les fréquences de chacune d'entre elles.

La représentation spectrale permet, d'un simple coup d'œil, de connaître les caractéristiques d'un son complexe.

Remarque : Il est possible de représenter l'évolution temporelle du spectre d'un signal sur un même graphique appelé sonagramme (*cf.* § 2.1. et plus). Sur les trois axes de celui-ci, on trouve le temps, les fréquences et les amplitudes. Dans le cas d'une représentation en deux dimensions, les amplitudes sont alors indiquées à l'aide d'une échelle de couleur.

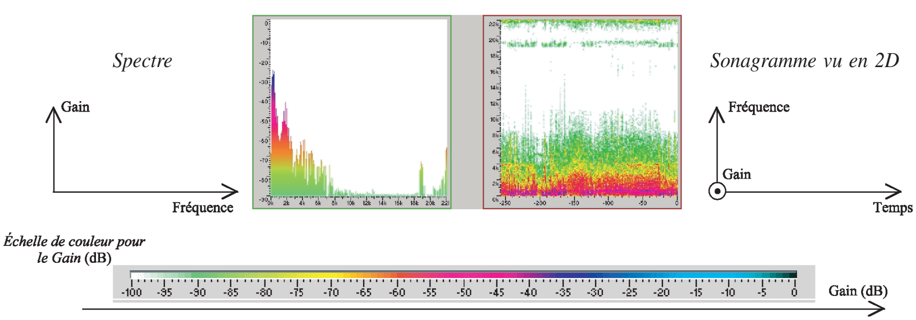


Sonagramme vu en 2D



Sonagramme vu en 3D

Par la suite, tous les spectres et sonagrammes obtenus à partir de GoldWave se présenteront comme suit :



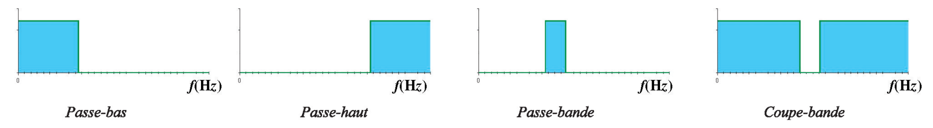
Remarques :

- Dans GoldWave, le gain est obtenu par une formule de la forme : $G(dB) = G_0 + 20 \log A$ avec A l'amplitude relative et $G_0 \simeq -15\,dB$.
- Pour ne pas alourdir la mise en page, ces différents axes ne seront plus précisés dans le reste de l'article.

1.3. Les filtres et leurs applications

1.3.1. Qu'est-ce qu'un filtre ?

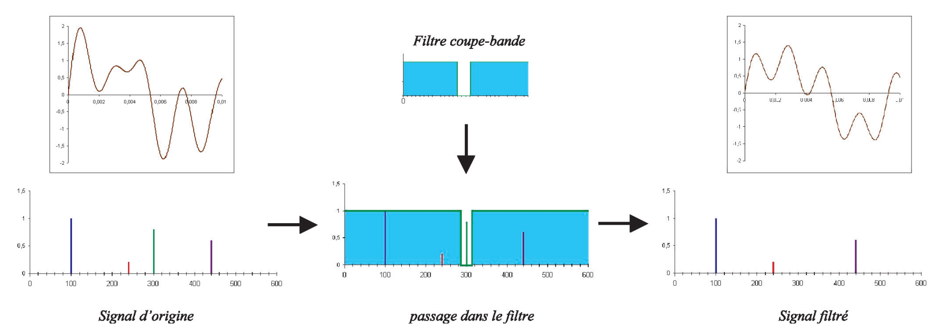
C'est tout simplement une « fenêtre fréquentielle » permettant de modifier le spectre d'un signal en atténuant ou en favorisant certaines fréquences par rapport aux autres. On distingue essentiellement quatre types de filtre : passe-bas, passe-haut, passe-bande et coupe-bande.



Représentation fréquentielle des quatre types de filtres

1.3.2. Application

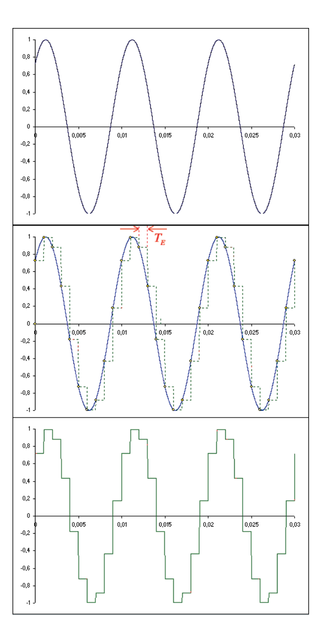
Cherchons, par exemple, à éliminer la composante de fréquence $f = 300$ Hz de notre son complexe. Pour cela, il suffit de faire passer le signal à travers un filtre coupe-bande centré sur cette fréquence.



Remarque : Ceci est, bien sûr, théorique, car dans la réalité les filtres ne sont malheureusement pas parfaits.

1.4. La numérisation des signaux sonores

1.4.1. La conversion Analogique – Numérique (A → N)



Un ordinateur ne peut traiter que des nombres. Or, les signaux sonores sont des grandeurs continues.

Numériser un signal consiste donc à transformer une grandeur continue en une suite de nombre, on parle alors de conversion Analogique – Numérique (A → N).

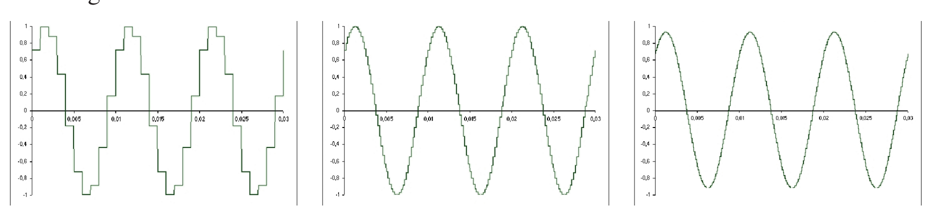
Pour des raisons matérielles, la conversion A → N prend un certain temps $\tau_{A \to N}$. En conséquence, la conversion ne peut se faire qu'à intervalle de temps égaux T_E appelé période d'échantillonnage, avec $T_E \geq \tau_{A \to N}$.

Dans notre exemple, on visualise l'échantillonnage d'un signal sinusoïdal de fréquence $f = 100$ Hz. La fréquence d'échantillonnage est : $f_E = \dfrac{1}{T_E} = 1000\,\text{Hz}$.

On remarque que le signal numérisé ne reproduit pas fidèlement le signal analogique d'origine, mais, l'information fréquence y est encore contenue.

1.4.2. Influences de la fréquence d'échantillonnage f_E

Intuitivement, la qualité de la reproduction augmente avec la fréquence d'échantillonnage.

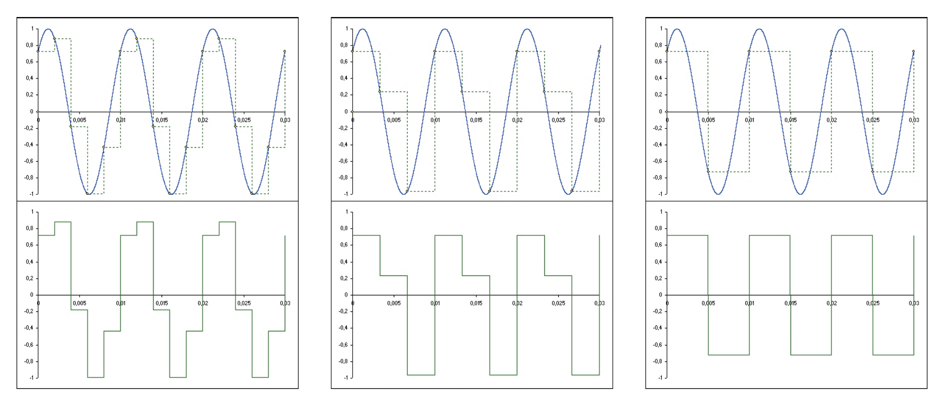


Le même signal échantillonné respectivement à $f_E = 1$; 5 *et* 10 kHz.

Malheureusement, cette augmentation se paie par une plus grande place occupée en mémoire.

Le choix de la fréquence d'échantillonnage se fera donc en fonction du temps de conversion A → N, de la mémoire disponible, de la nature des signaux à numériser et, bien sûr, de l'utilisation finale des données numériques.

Inversement, une diminution de la fréquence d'échantillonnage dégrade la reproduction.

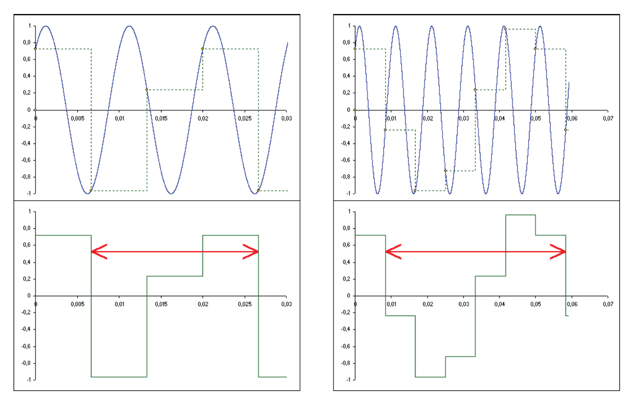


Le même signal échantillonné respectivement à f_E = 500 ; 300 *et* 200 Hz.

Malgré cette dégradation, nous remarquons que l'information fréquence du signal reste conservée quand la fréquence d'échantillonnage est f_E = 200 Hz, soit deux fois la fréquence f du signal ($f_E = 2 \cdot f$).

1.4.3. Et si la fréquence d'échantillonnage $f_E < 2 \cdot f$?

Si l'on choisit de prendre $f_E < 2 \cdot f$ (soit $f > \frac{f_E}{2}$), alors l'échantillonnage s'effectue moins de deux fois par période (il y a moins de deux points de mesure à chaque période du signal à numériser).



Le même signal échantillonné respectivement à f_E = 150 *et* 120 Hz.

À f_E = 150 Hz, la période du signal numérisé est alors T_N = 20 ms soit une fréquence f_N = 50 Hz. De même, à f_E = 120 Hz, la période du signal numérisé est alors T_N = 50 ms

soit une fréquence $f_N = 20$ Hz.

Nous constatons alors :

– que la fréquence du signal numérisé n'est plus $f_N = 100$ Hz, il y a donc perte de l'information fréquence ;

– que la fréquence du signal numérisé f_N est de la forme : $f_N = f_E - f$ avec f_E la fréquence d'échantillonnage et f la fréquence du signal à numériser ;

– que la fréquence f_N du signal numérisé est inférieure à $\frac{f_E}{2}$: $f_N < \frac{f_E}{2}$.

En effet, avec $f_N = f_E - f$ ou $f = f_E - f_N$ et $f > \frac{f_E}{2}$, on obtient $f_E - f_N > \frac{f_E}{2}$ soit $f_N < \frac{f_E}{2}$.

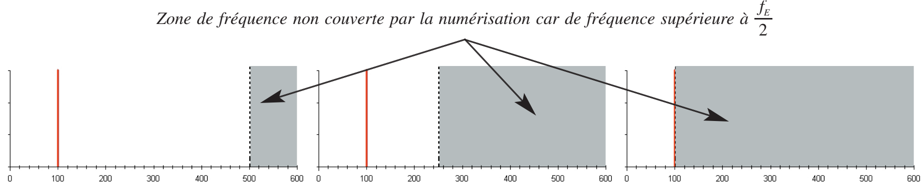
1.4.4. Conséquences

Remarque : Les différentes conséquences énoncées dans ce paragraphe découlent directement du théorème de Shannon.

♦ Si l'on veut échantillonner un signal de fréquence f sans perdre cette information, il faut que la fréquence d'échantillonnage f_E soit telle que : $f_E \geq 2 \cdot f$ (ou $f \leq \frac{f_E}{2}$).

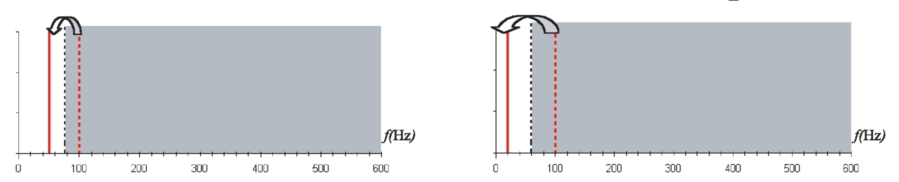
♦ $f_E = 2 \cdot f$ (ou $f = \frac{f_E}{2}$) constitue la limite au-delà de laquelle il n'est plus possible de conserver l'information fréquence du signal à numériser.

♦ Le signal numérisé a forcément une fréquence comprise entre 0 Hz et $\frac{f_E}{2}$. La représentation spectrale du signal numérisé voit donc son échelle des fréquences réduite à cette gamme.



Spectre du même signal de fréquence $f = 100$ Hz *échantillonné respectivement à* $f_E = 1\,000$; 500 *et* 200 Hz.

Dans le cas ou la fréquence d'échantillonnage est $f_E < 2 \cdot f$ (soit $f > \frac{f_E}{2}$), le spectre du signal numérisé présente une symétrie par rapport à la fréquence $\frac{f_E}{2}$.



Spectre du même signal de fréquence f = 100 Hz *échantillonné respectivement à* f_E = 150 *et* 120 Hz.

À f_E = 150 Hz, le signal numérisé a une fréquence f_N = 50 Hz symétrique de la fréquence du signal f = 100 Hz par rapport à $\frac{f_E}{2} = 75$ Hz.

<u>*Remarque*</u> *:* f_N étant le symétrique de f par rapport à $\frac{f_E}{2}$, sa fréquence est alors donnée par $f_N = \frac{f_E}{2} - \left(f - \frac{f_E}{2}\right)$. On retrouve alors bien $f_N = f_E - f$ (*cf.* § 1.4.4.).

De même, à f_E = 120 Hz, le signal numérisé a une fréquence f_N = 20 Hz symétrique de la fréquence du signal f = 100 Hz par rapport à $\frac{f_E}{2} = 60$ Hz. On parle alors de repliement du spectre.

1.4.5. Généralisation

Ces conditions se généralisent bien sûr lors de la numérisation d'un signal complexe. En effet, la numérisation d'un signal complexe dont le spectre fréquentiel est compris entre 0 Hz et f_{Max} ne peut se faire correctement que si la fréquence d'échantillonnage f_E soit telle que $f_{Max} \leq \frac{f_E}{2}$. Dans le cas contraire, le spectre du signal numérisé ne correspond pas à celui du signal d'origine (effet de repliement du spectre).

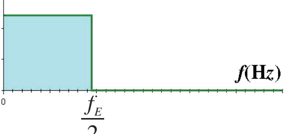
Prenons, par exemple, la numérisation de notre signal complexe (*cf.* § 1.2.2.) en utilisant une fréquence d'échantillonnage $f_E = 700$ Hz.



Spectre d'un signal complexe avant et après numérisation échantillonné à f_E = 700 Hz.

Nous remarquons que la composante de fréquence $f = 440$ Hz ne respecte pas la condition $f_{Max} \leq \frac{f_E}{2}$ (avec $\frac{f_E}{2} = 350$ Hz). Il y a alors repliement du spectre autour de $\frac{f_E}{2}$ pour cette composante et celle-ci se retrouve dans le spectre à la fréquence $f_N = f_E - f$ soit $f_N = 260$ Hz. Donc les deux spectres ne correspondent plus.

<u>Remarque</u> : Afin d'éviter ce type de problème, il est fréquent de mettre avant le C A N un filtre passe-bas de fréquence de coupure égale à $\frac{f_E}{2}$. On parle alors de filtre anti-repliement.



1.4.6. Choix de la fréquence d'échantillonnage

Notre étude porte sur des signaux acoustiques. Leurs fréquences ne peuvent donc être supérieures à $f_{Max} = 20$ kHz (*cf.* § 1.1.2.).

Afin d'obtenir une représentation spectrale correcte du signal à numériser, la fréquence d'échantillonnage f_E doit respecter la condition suivante (*cf.* § 1.4.5.) :

$$f_E \geq 2 \cdot f_{Max}, \qquad \text{soit } f_E \geq 40 \text{ kHz}$$

Ce principe est directement appliqué dans l'industrie du disque. En effet, les CD musicaux sont échantillonnés à $f_E = 44\,100$ Hz, soit une fréquence supérieure au seuil des 40 kHz.

<u>Remarque</u> : Les maisons de disques ainsi que les fabricants tentent de lancer sur le marché un nouveau type de CD ayant une fréquence d'échantillonnage bien supérieure à 44 100 Hz. Leurs arguments portent sur l'amélioration de la restitution sonore, mais, il semble plutôt que la protection contre le piratage soit vraiment à l'origine de ce projet.

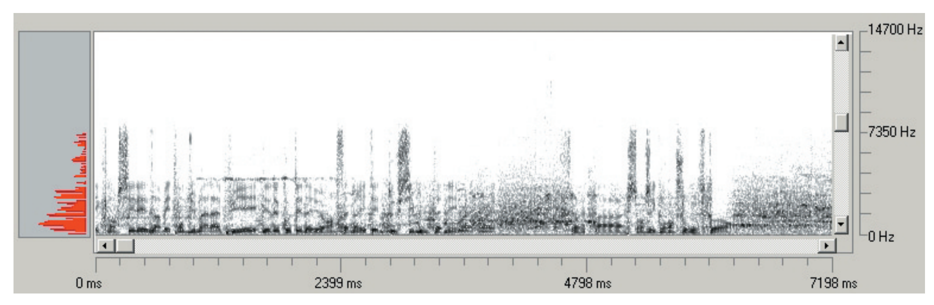
Bien entendu, les cartes « son » des ordinateurs proposent la même fréquence d'échantillonnage que celle des CD, soit 44 100 Hz (ainsi que des sous-multiples comme 22 050 Hz ou 11 025 Hz). Dorénavant, sauf indication contraire, tous les enregistrements numériques sont échantillonnés à la fréquence $f_E = 44\,100$ Hz.

2. LE SON ÉMIS PAR LES CHAÎNES TV

Si l'on veut comprendre le système de cryptage utilisé, il faut dans un premier temps comparer le son émis par une chaîne TV cryptée et une non cryptée. Pour cela, on dispose d'un outil plus performant que notre oreille, à savoir la représentation spectrale des signaux. Nous entrons, maintenant, dans le vif du sujet…

2.1. Chaîne non cryptée

Après enregistrement et numérisation du son émis par une chaîne non cryptée (son prélevé directement à la sortie audio d'une carte « TV » d'ordinateur : *cf.* annexe 2), on obtient le sonagramme suivant :

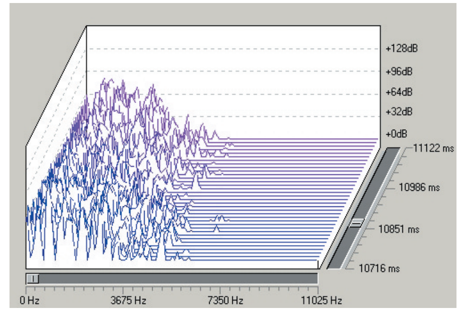


Sonagramme du son émis par une chaîne non cryptée.

À la vue de ce sonagramme, nous remarquons immédiatement que la bande de fréquence utilisée reste limitée à 8 kHz.

De plus, avec une représentation en 3D, on observe que l'essentiel du spectre semble être entre 0 et 4 kHz.

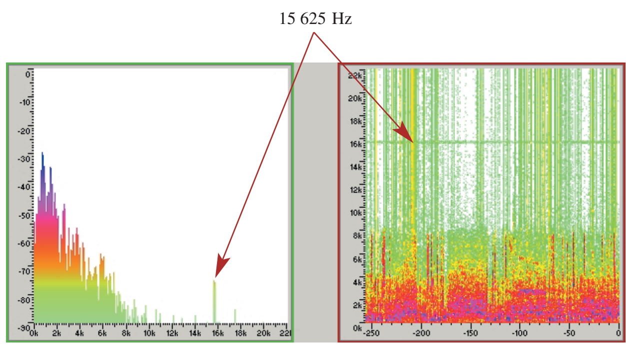
Il fallait s'attendre à ce résultat. En effet, cette bande de fréquence correspond à la zone de meilleure sensibilité de notre oreille (*cf.* § 1.1.2.).



Le même sonagramme vu en 3D.

Remarque : La bande sonore des chaînes TV ne répond pas à la norme Haute Fidélité « Hi-Fi », à savoir une restitution des fréquence jusqu'à 20 kHz.

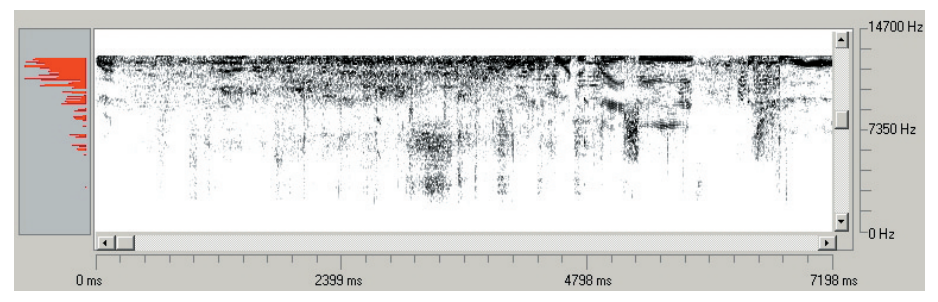
Si nous élargissons l'échelle de nos représentations spectrales entre 0 et 22 050 Hz (en raison de la fréquence d'échantillonnage de 44 100 Hz), nous observons aussi la présence d'un pic placé à 15 625 Hz présent sur tout l'enregistrement.



Spectre et sonagramme du son émis par une chaîne non cryptée à pleine échelle (0 Hz - 22 050 Hz).

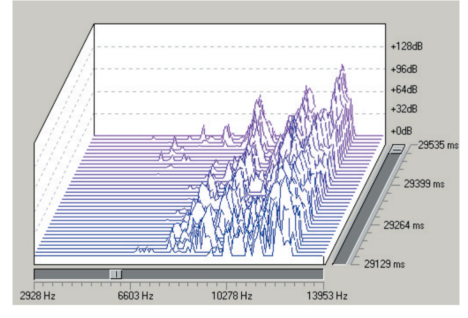
2.2. Chaîne cryptée

En suivant le même protocole, on obtient le sonagramme d'une chaîne cryptée.



Sonagramme du son émis par une chaîne cryptée.

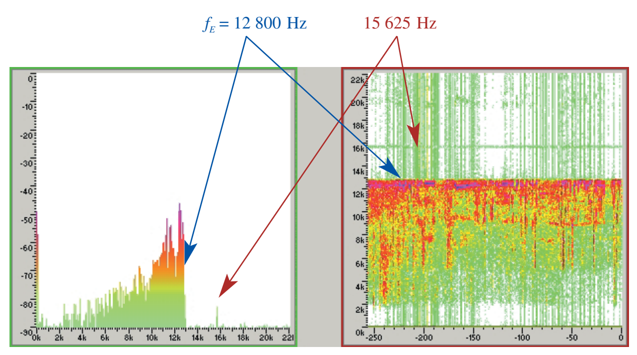
Ce qui frappe immédiatement, c'est la répartition du spectre. Celui-ci ne se répartit plus entre 0 et 8 kHz mais plutôt entre 5 et 13 kHz.



Le même sonagramme vu en 3D.

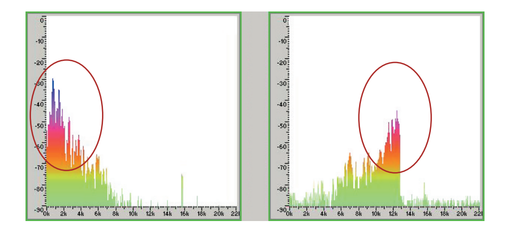
La même représentation 3D que précédemment nous montre aussi que l'essentiel du spectre semble maintenant compris entre 9 et 13 kHz. Notons également l'arrêt brutal du spectre à cette fréquence d'environ 13 kHz. La représentation à pleine échelle (0 Hz - 22 050 Hz) rend encore plus spectaculaire cette limitation brutale du spectre. Une mesure plus fine de sa valeur donne : $f_{Lim} = 12\,800$ Hz

Par contre, sur l'ensemble de l'enregistrement, nous observons toujours la présence de ce pic placé à 15 625 Hz.



Spectre et sonagramme du son émis par une chaîne cryptée à pleine échelle (0 Hz - 22 050 Hz).

2.3. Principe du cryptage



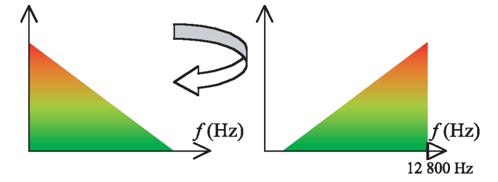
En comparant les deux spectres, on distingue nettement une symétrie dans les répartitions. Tout se passe comme si les fréquences graves étaient devenues aiguës et inversement (le 0 Hz se retrouve donc à 12 800 Hz).

Remarque : Côté sensation auditive, le son d'une chaîne cryptée semble moins fort. C'est la conséquence d'une moindre sensibilité de l'oreille dans ce domaine des fréquences (*cf.* § 1.1.2.).

Toutefois, cette symétrie ne concerne pas le pic placé à 15 625 Hz qui se retrouve sur l'ensemble des deux spectres et dont le rôle devra être précisé ultérieurement.

Par souci de simplification, le schéma ci-contre montre une modélisation des répartitions spectrales d'une chaîne non cryptée et d'une chaîne cryptée. Le contraste est encore plus évident, le principe de cryptage saute alors aux yeux :

→ Il y a eu retournement du spectre.



*Représentation simplifiée des spectres d'une **chaîne non cryptée** et d'une **chaîne cryptée**.*

Ce cryptage permet de rendre incompréhensible la bande son tout en restant dans le domaine des fréquences audibles. De plus, la transmission du son crypté peut se faire par le canal réservé habituellement au son, sans modification des émetteurs ou des récepteurs.

3. LE DÉCRYPTAGE DU SON CODÉ

L'observation du spectre d'une chaîne codée nous a permis de comprendre le principe utilisé pour rendre la bande son incompréhensible. Mais, pour procéder au décryptage, il faut connaître la méthode employée pour retourner le spectre. C'est la présence de ce « mur » fréquentiel placé à 12 800 Hz qui va nous fournir l'information la plus importante sur cette méthode. Lançons-nous maintenant dans le décryptage du son codé.

3.1. La modulation

3.1.1. Produit de deux signaux sinusoïdaux

On utilise couramment la modulation dans le cas de la transmission d'un signal basse fréquence *S(t)* par un signal de haute fréquence (la porteuse *P(t)*). C'est la cas par exemple lors de la transmission d'un signal sonore ($f_S < 20$ kHz) par une onde radio ($f_P \approx 1$ MHz).

D'une manière générale, on parle de modulation quand on réalise le produit de deux signaux sinusoïdaux :

– le signal modulant *S(t)* de la forme $S(t) = S_M \cos(2\pi \cdot f_S \cdot t)$;

– la porteuse *P(t)* de la forme $P(t) = P_M \cos(2\pi \cdot f_P \cdot t)$.

Le signal modulé *M(t)* obtenu par multiplication est alors :

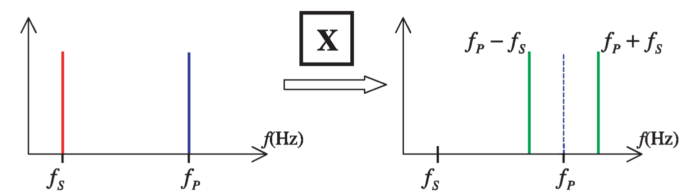
$$M(t) = P_M \cdot S_M \left(\cos(2\pi \cdot f_P \cdot t) \cdot \cos(2\pi \cdot f_S \cdot t)\right)$$

L'application de la célèbre formule de trigonométrie :

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) + \cos(a+b)\right)$$

donne : $$M(t) = \frac{P_M \cdot S_M}{2}\left(\cos\left(2\pi \cdot (f_P - f_S) \cdot t\right) + \cos\left(2\pi \cdot (f_P + f_S) \cdot t\right)\right)$$

On remarque immédiatement que la multiplication des signaux engendre la disparition des fréquences de la porteuse f_P et du signal modulant f_S au profit de deux nouvelles fonctions sinusoïdales de fréquence $f_P - f_S$ et $f_P + f_S$ (différence et somme des fréquences f_P et f_S).



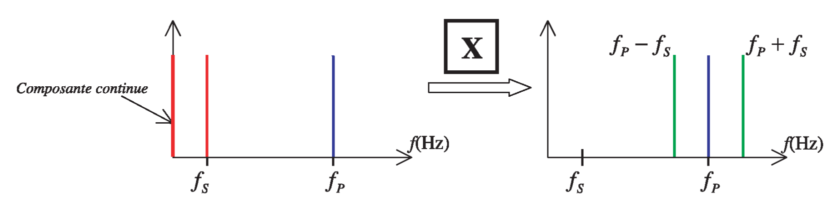
Représentation fréquentielle de la modulation.

De plus, ces deux raies sont placées symétriquement par rapport à la fréquence de la porteuse f_P.

<u>Remarque</u> : Si le signal modulant présente une composante continue (donc de la forme $S(t) = S_0 + S_M \cos(2\pi \cdot f_S \cdot t)$), alors on conserve aussi la fréquence f_P de la porteuse dans le spectre final. En effet, le signal modulé prend alors la forme suivante :

$$M(t) = P_M \cdot \cos(2\pi \cdot f_P \cdot t) \cdot \left(S_0 + S_M \cdot \cos(2\pi \cdot f_S \cdot t)\right)$$

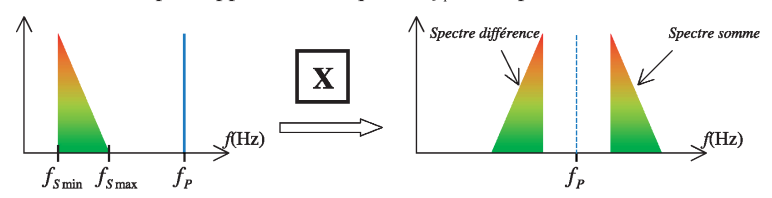
Soit : $$M(t) = P_M \cdot S_0 \cdot \cos(2\pi \cdot f_P \cdot t) + \frac{P_M \cdot S_M}{2}\left(\cos(2\pi \cdot (f_P - f_S) \cdot t) + \cos(2\pi \cdot (f_P + f_S) \cdot t)\right)$$



Représentation fréquentielle de la modulation dans le cas d'un signal modulant présentant une composante continue.

3.1.2. Cas d'un signal modulant complexe

Dans ce cas, le produit entre la porteuse f_P et chaque composante du signal complexe f (comprise entre $f_{S\,min}$ et $f_{S\,max}$) engendre deux raies de fréquence $f_P - f$ et $f_P + f$. L'ensemble des raies produites forme alors un spectre somme et un spectre différence symétrique l'un de l'autre par rapport à la fréquence f_P de la porteuse (effet de miroir).



Représentation fréquentielle de la modulation dans le cas d'un signal modulant complexe dont le spectre s'étend de $f_{S\,min}$ à $f_{S\,max}$.

Si l'on compare le spectre d'origine avec le spectre différence, on remarque immédiatement qu'il y a eu retournement de spectre (les « graves » sont devenus « aiguës » et inversement).

Le spectre somme, quant à lui, est décalé du spectre d'origine par ajout de la fréquence de la porteuse f_P (on parle alors de glissement du spectre).

3.2. La modulation par traitement numérique

Nous allons maintenant voir comment réaliser le produit de deux signaux dans un logiciel de traitement numérique du son (GoldWave 4.26 dans ce cas). Puis dans un deuxième temps nous mettrons en évidence les particularités de ce genre d'opération sur un signal numérisé.

Pour permettre au plus grand nombre de réaliser ces manipulations, on indiquera en caractère gras les différentes étapes des menus déroulants du logiciel. De plus, à chaque étape, est associée une image de la « fenêtre » correspondante.

Remarque : Cette présentation sera utilisée dans cet article à chaque fois que de nouvelles opérations sur GoldWave seront nécessaires.

3.2.1. Réalisation du produit de deux signaux

Tout d'abord, nous allons créer un son pur, de fréquence $f_S = 500$ Hz, qui va nous servir de signal modulant.



Étape 1

Créer un fichier son par : **File** → **New**. Puis choisir un son stéréo d'une durée de 20 s avec une fréquence d'échantillonnage de 44 100 Hz.

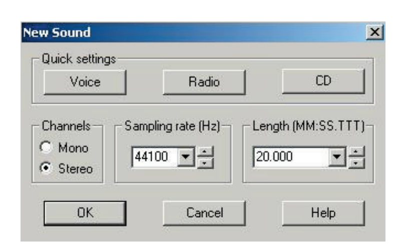
Remarque : Le mode stéréo n'est pas indispensable ici, mais il permet de visualiser simultanément le spectre d'une voie et le sonagramme de l'autre voie.



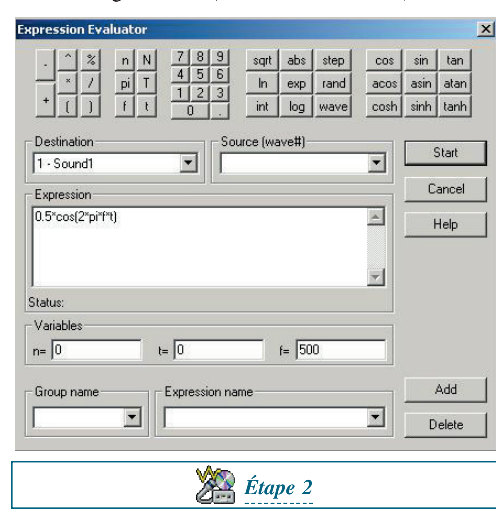
Étape 2

Calculer le son pur de fréquence $f_S = 500$ Hz par : **Tools → Expression evaluator**. Préciser alors l'expression mathématique du son, soit : $0{,}5\cos(2\pi \cdot f \cdot t)$. Indiquer la valeur de la fréquence dans la case prévue.

Remarque : Ici, l'amplitude relative a été choisie égale à 0,5 (1 étant le maximum).







Étape 2

Ensuite, nous allons faire le produit entre notre son pur de fréquence $f_S = 500$ Hz (signal modulant) et un son de fréquence $f_P = 10\,000$ Hz (la porteuse).

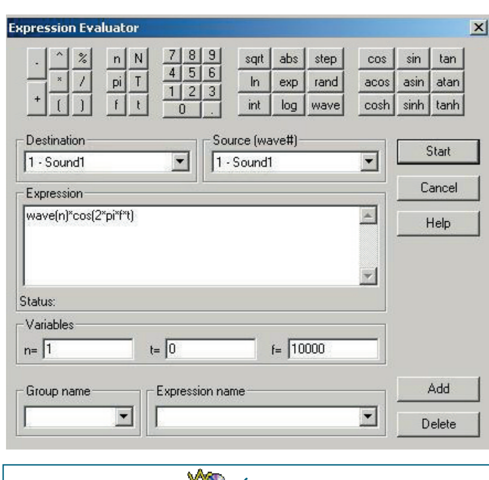


Étape 3

Multiplication des signaux par : **Tools → Expression evaluator**.

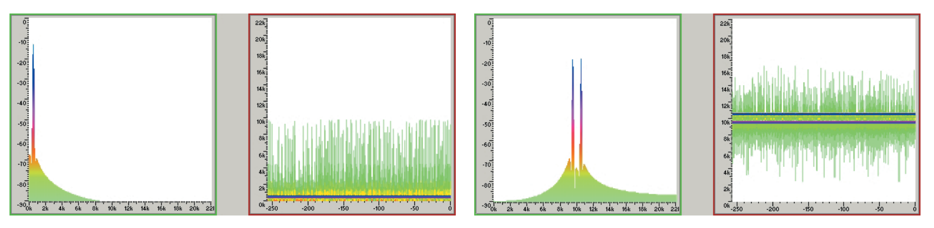
Avec comme signal d'origine (Source (wave#)) le son déjà créé, et l'expression mathématique de la porteuse de la forme : $\cos(2\pi \cdot f \cdot t)$. La variable n = 1 précise le numéro du fichier source et, f = 10 000 donne la fréquence de la porteuse.

Remarque : Tout fichier sonore ouvert peut servir de destination au son calculé. Il suffit de le préciser dans la case « Destination » de la fenêtre.



Étape 3

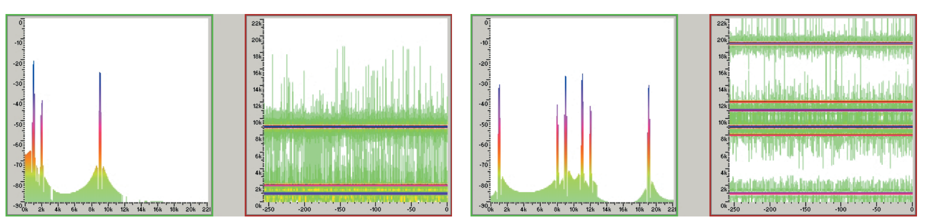
La comparaison entre les spectres du son pur et celui du signal modulé est conforme aux prédictions. On observe bien la présence des deux raies placées de façon symétrique par rapport à la fréquence de la porteuse (f_P = 10 000 Hz) aux fréquences f_1 = 9 500 Hz et f_2 = 10 500 Hz.



Spectre et sonagramme du son pur. *Spectre et sonagramme du son modulé.*

Remarque : En modulation numérique, le signal modulant et la porteuse sont d'abord échantillonnés avant de procéder au produit numérique de chaque couple d'échantillons. En conséquence, le spectre du signal numérique modulé ainsi obtenu peut présenter une petite différence avec celui d'un signal modulé analogiquement, puis numérisé.

Ce qui vient d'être fait peut se généraliser avec un son complexe. On retrouve alors notre effet de « miroir » du spectre d'origine par rapport à la fréquence de la porteuse.



Spectre et sonagramme d'un son complexe. *Spectre et sonagramme du son modulé.*

Remarque : Le son complexe se compose de trois sons purs de fréquences 1 000 Hz, 2 000 Hz et 9 000 Hz ayant des amplitudes relatives respectivement égales à (0,5), (0,1) et (0,3). L'expression mathématique donnée dans l'étape 2 est :

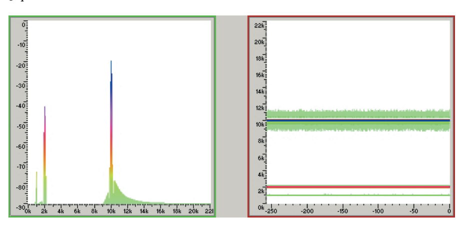
$$0{,}5\cos(2\pi\cdot f\cdot t)+0{,}1\cos(2\pi\cdot 2\cdot f\cdot t)+0{,}3\cos(2\pi\cdot 9\cdot f\cdot t)$$

en indiquant une valeur de la fréquence f = 1 000 Hz.

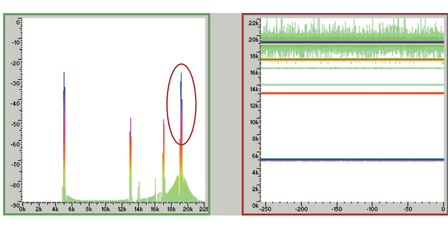
3.2.2. Limitation du traitement numérique

Dans les deux exemples précédents, les spectres des signaux modulés confirmaient parfaitement les prévisions théoriques. Malheureusement, nous allons voir sur cet exemple que ce n'est pas toujours le cas.

Ci-dessous, on peut observer le spectre d'un son complexe (comportant trois raies positionnées à 1 000 Hz, 2 000 Hz et 10 000 Hz) modulé par un son pur de fréquence $f_P = 15\,000$ Hz.



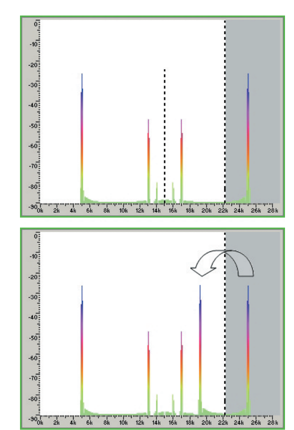
Spectre et sonagramme du son complexe.



Spectre et sonagramme du son modulé.

Remarque : Les amplitudes relatives sont respectivement égales à (0,002), (0,05) et (0,5).

L'effet « miroir » par rapport à la porteuse ($f_P = 15\,000$ Hz) n'est pas respecté pour tout le spectre d'origine. On remarque bien que les deux premières composantes du son complexe (1 000 Hz et 2 000 Hz) se retrouvent correctement placées, mais, la troisième (10 000 Hz) n'a pas la symétrie attendue autour de 15 000 Hz.



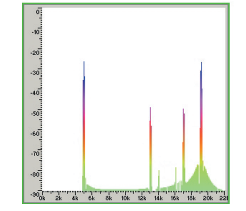
Pour l'expliquer, il faut garder à l'esprit que l'on travaille avec des signaux échantillonnés.

En effet, les trois composantes de fréquence $f_1 = 1\,000$ Hz, $f_2 = 2\,000$ Hz et $f_3 = 10\,000$ Hz donnent respectivement après modulation des raies de fréquence:

- $f_{1-} = f_P - f_1 = 14\,000$ Hz et $f_{1+} = f_P + f_1 = 16\,000$ Hz ;
- $f_{2-} = f_P - f_2 = 13\,000$ Hz et $f_{2+} = f_P + f_2 = 17\,000$ Hz ;
- $f_{3-} = f_P - f_3 = 5\,000$ Hz et $f_{3+} = f_P + f_3 = 25\,000$ Hz.

Le fichier numérique étant échantillonné avec une fréquence $f_E = 44\,100$ Hz, la raie de fréquence $f_{3+} = 25$ kHz se retrouve alors en dehors de la plage des fréquences couverte (0 - 22 050 Hz) (*cf.* § 1.4.4. et 1.4.5.).

On assiste donc au repliement du spectre autour de $\frac{f_E}{2}$ pour cette composante et celle-ci se retrouve à la fréquence $f^*_{3+} = f_E - f_{3+}$, soit $f^*_{3+} = 44\,100 - 25\,000 = 19\,100$ Hz,. On retrouve ainsi le spectre du signal numérique obtenu.

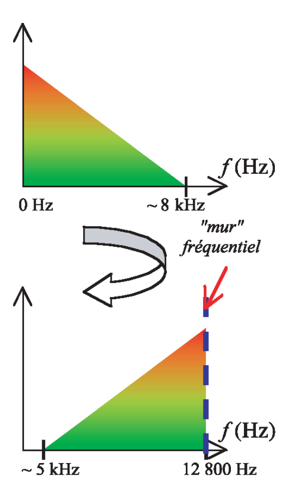


3.3. Application au son crypté

3.3.1. La fréquence f_P de la porteuse

Nous avons vu que crypter le son consiste à retourner son spectre. Malheureusement, nous savons aussi que la fréquence du signal sinusoïdal (la porteuse) de fréquence f_P ayant servi dans la modulation disparaît du spectre du signal modulé.

Pour le décryptage, il est donc nécessaire de connaître cette fréquence afin de replacer le spectre correctement. Dans le cas contraire, on assisterait à un glissement du spectre vers les « graves » ou les « aiguës ».



Remarque : Ce glissement peut être recherché dans le cas, par exemple, d'un « trucage » de la voix.

C'est la limitation fréquentielle du spectre crypté placé à 12 800 Hz qui nous fournit cette information.

En effet, comme le spectre d'origine possède une plage de fréquence comprise entre 0 Hz et $f_{S\,max}$ (*cf.* § 2.1.), le spectre crypté a alors forcément un domaine de fréquence s'étalant de $(f_P - f_{s\,max})$ à $(f_P - 0)$. Dans notre cas, on observe sur le spectre crypté que $f_P - 0 = 12\,800$ Hz, soit une fréquence de porteuse : $f_P = 12\,800$ Hz.

3.3.2. Le retournement du spectre

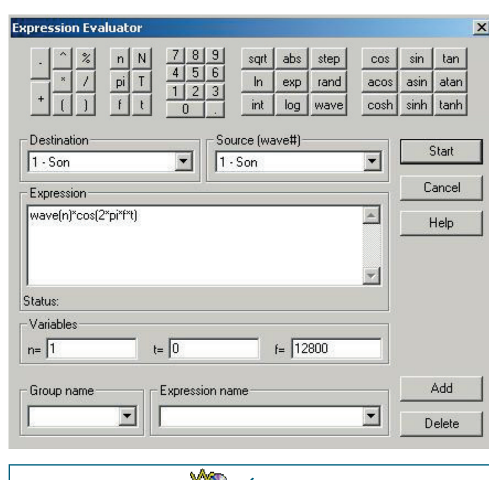
Connaissant la fréquence de la porteuse f_P, il est maintenant facile de remettre le spectre à sa place d'origine et d'entendre enfin un son décodé.

Réalisons pour cela le produit entre notre son crypté enregistré et la porteuse (signal sinusoïdal de fréquence $f_P = 12\,800$ Hz).


Étape 1

Retournement du spectre par : **Tools → Expression evaluator**

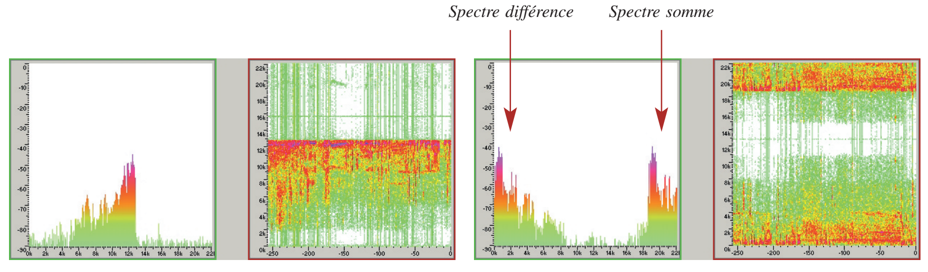
Le signal d'origine (Source (wave#)) est le son enregistré ; l'expression mathématique de la porteuse est encore une fois de la forme : $\cos(2\pi \cdot f \cdot t)$. La variable n = 1 précise le numéro du fichier source et,



Étape 1

f = 12 800 donne la fréquence de la porteuse permettant le retournement correct du spectre.

Ci-dessous, on peut observer le spectre et le sonagramme du son crypté ainsi que ceux du son modulé par traitement numérique.



Spectre et sonagramme du son crypté. *Spectre et sonagramme du son décrypté.*

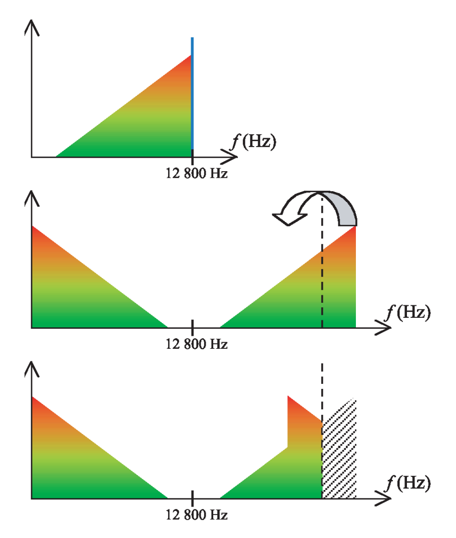
Le résultat nous montre qu'il y a bien eu retournement du spectre (voir spectre différence). Celui-ci a maintenant une fréquence comprise entre 0 Hz et $f_{S\,\max} \simeq 8$ kHz ; c'est notre son décrypté.

De plus, on remarque aussi la présence d'un spectre somme, mais il ne respecte pas la symétrie attendue autour de $f_P \simeq 12\,800$ Hz.

Une fois encore, la cause de cette dissymétrie résulte de notre travail avec des signaux échantillonnés.

La modulation entre la porteuse de fréquence $f_P = 12\,800$ Hz et le spectre crypté ayant une fréquence comprise entre $f_{S\,\min} = 5$ kHz et $f_{S\,\max} = 12\,800$ Hz engendre un spectre différence (retourné) et un spectre somme. Les plages de fréquence des deux spectres sont :

- $f_P - f_{S\,\max} = 0$ Hz et $f_P - f_{S\,\min} \simeq 8$ kHz pour le spectre différence (retourné) ;
- $f_P + f_{S\,\min} = 18$ kHz et $f_P + f_{S\,\max} = 25\,600$ kHz pour le spectre somme.



Une partie du domaine fréquentiel du spectre somme se retrouve alors hors des fréquences couvertes (0 - 22 050 Hz) du fichier numérique échantillonné avec une fréquence $f_E = 44\,100$ Hz. Il y a donc repliement du spectre autour de 22 050 Hz.

Lors de l'écoute du son ainsi décrypté, l'effet est saisissant. On comprend parfaitement les paroles et la musique. Le décodage semble être parfaitement réalisé. Malheu-

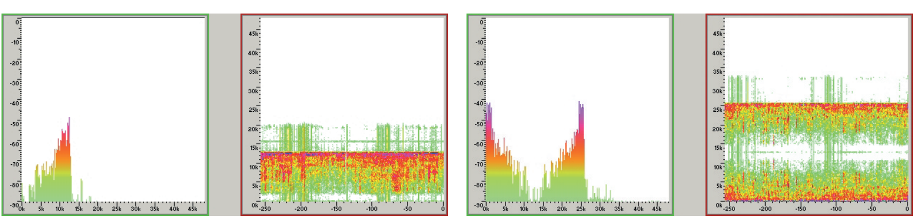
reusement, on se rend compte assez rapidement qu'il y a aussi un sifflement régulier qui devient rapidement gênant.

Remarques :

– D'un point de vu acoustique, le repliement du spectre somme ne change rien. En effet, celui-ci se trouve dans une zone de fréquence quasi inaudible (*cf.* § 1.1.2.).

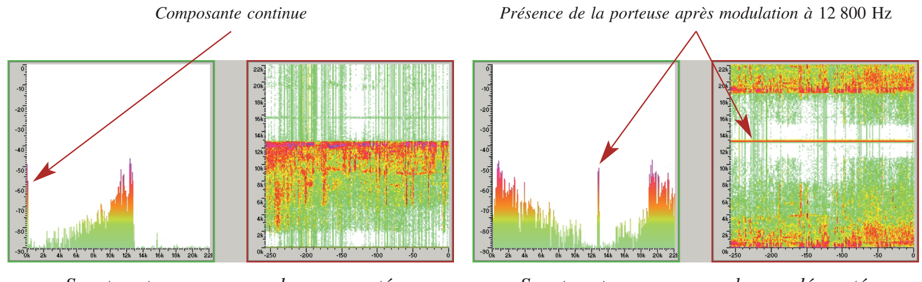
– Si l'on ne veut pas avoir de repliement du spectre somme, il suffit de travailler avec une fréquence d'échantillonnage f_E telle que $\frac{f_E}{2} > 25\,600$ Hz ; soit $f_E > 51\,200$ Hz. Par exemple, les figures ci-dessous nous montrent le résultat parfaitement symétrique obtenu avec une fréquence d'échantillonnage $f_E = 96\,000$ Hz.

Représentation spectrale et sonagramme pour un son crypté enregistré et décodé avec une fréquence d'échantillonnage $f_E = 96\,000$ Hz.



Spectre et sonagramme du son crypté. *Spectre et sonagramme du son décrypté.*

– Il faut faire attention de ne pas avoir de composante continue (offset) dans le signal du son crypté. Dans le cas contraire, on conserverait dans le spectre modulé la présence de la porteuse de fréquence $f_P = 12\,800$ Hz (*cf.* § 3.1.1.). Cela se traduirait par un autre sifflement très aigu et très intense lors de l'écoute du son décodé.



Spectre et sonagramme du son crypté. *Spectre et sonagramme du son décrypté.*

Dans ce cas, il faut supprimer cette composante avant la modulation. Goldwave permet de le faire très simplement :



Étape 1

Suppression d'une composante continue par : **Effects → Offset**

La valeur permettant de supprimer l'offset

Offset
Offset: 0.022
-2 -1 0 1 2
OK Cancel Help

Étape 1

est automatiquement calculée par GoldWave (elle est donnée en valeur relative). Il ne reste qu'à valider la fenêtre pour réaliser l'opération.

3.4. Finalisation du procédé de décryptage

Le son décrypté, bien que parfaitement compréhensible, présente un sifflement léger mais régulier. Pourtant, l'observation de son spectre ne semble pas présenter de singularité prouvant la présence d'un signal sinusoïdal. Nous allons maintenant voir que la présence de ce sifflement était prévisible en raison de la méthode utilisée pour le décryptage.

3.4.1. Source du sifflement

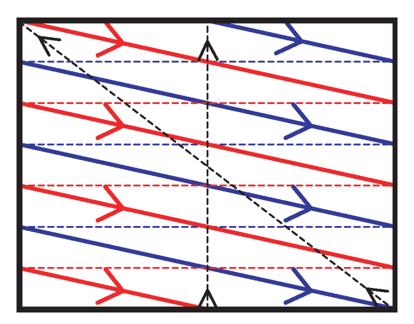
Quelle que soit la nature des chaînes TV, nous avions noté sur les spectres la présence d'une raie située à 15 625 Hz (*cf.* § 2.1. à 3.). Deux questions se posent alors :

– Pourquoi cette raie est-elle toujours présente dans le signal sonore des chaînes TV ?
– Que devient cette raie après modulation par le signal sinusoïdal de fréquence $f_P = 12\,800$ Hz ?

L'origine de ce signal est en fait liée au principe même de la formation de l'image sur l'écran de télévision.

Rappelons que celle-ci se forme par l'intermédiaire d'un faisceau d'électrons frappant des pastilles phosphorescentes sur l'écran (luminophores). Pour obtenir une animation correcte, l'image est renouvelée 25 fois par seconde (24 pour le cinéma).

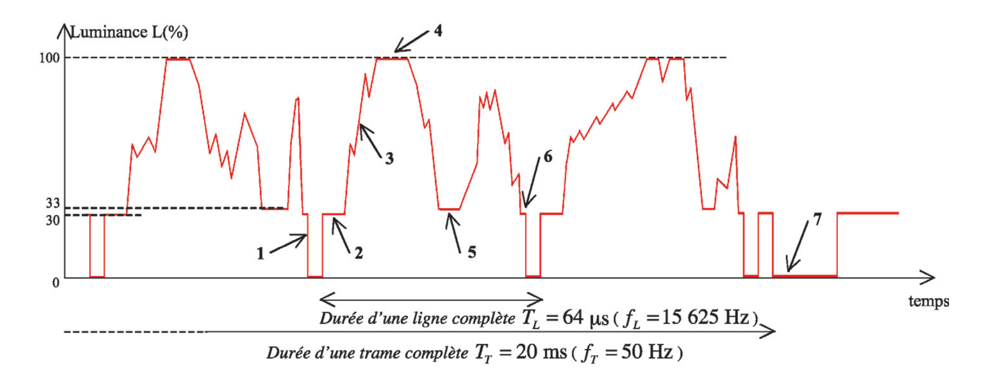
En pratique, le faisceau d'électrons balaie l'écran à raison de deux fois 312,5 lignes, soit 625 lignes par image.



Représentation du déplacement du faisceau d'électron sur l'écran de télévision. L'image est séparée en trame paire (312,5 lignes) et trame impaire (312,5 lignes).

<u>*Remarque*</u> *:* Cette séparation en 312,5 lignes paires et 312,5 lignes impaires (appelées les trames) permet d'éviter un effet de scintillement de l'image.

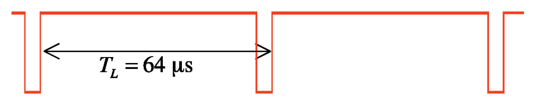
Toute l'information permettant de reconstituer l'image est codée puis transportée par le signal vidéo. Le procédé de codage respecte des standards nationaux ou internationaux comme le SECAM en France.



L'ensemble des informations fourni par le signal vidéo se décompose comme suit :

1. Top de synchronisation d'une durée de 4,7 µs (top court) pour indiquer le début d'une nouvelle ligne. Le niveau de synchronisation correspond à 3 % de l'amplitude maximale du signal vidéo.
2. Le top ligne est suivi d'un palier d'une durée de 5,8 µs au cours de laquelle le faisceau d'électron reste éteint. Le niveau de suppression correspond à 30 % de l'amplitude maximale.
3. C'est le signal de luminance. Le spot allumé se déplace le long de la ligne (durée 52 µs), son intensité est fonction de l'amplitude du signal vidéo. Le noir de l'image correspond à 33 % de l'amplitude maximale et le blanc à 100 % (voir 4 et 5).
4. Cette partie de la ligne est blanche car l'amplitude du signal est à 100 % de son maximum.
5. Zone noire de la ligne ; l'amplitude est à 33 % de son maximum.
6. C'est la fin de la ligne (garde), le signal vidéo passe au niveau de suppression pour éteindre le spot (durée 1,5 µs) et permettre son retour pour la prochaine ligne.
7. La dernière ligne de la trame se termine. Elle est suivie d'une série d'impulsion (tops courts et longs) permettant de faire la synchronisation de la trame suivante.

Remarque : Un calcul simple montre que le spot est visible sur l'écran pendant 52 µs. Pour un écran de télévision de largeur 55 cm (soit 70 cm de diagonale), la vitesse de balayage horizontale du spot est alors d'environ 10,5 $km.s^{-1}$…



Le signal de synchronisation des lignes (top ligne) peut se résumer à un signal carré. À raison de 625 lignes par image et 25 images par seconde, il y a $625 \times 25 = 15\,625$ tops par seconde. Sa fréquence $f_L = 15\,625$ Hz correspond exactement à la raie présente dans les spectres audio des chaînes TV.

A priori, il peut sembler surprenant d'avoir ce signal de synchronisation présent dans

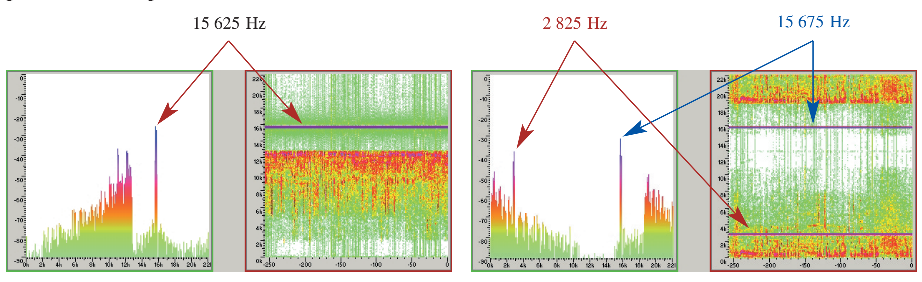
le signal audio. Mais il ne faut pas perdre de vue qu'avec une fréquence $f_L = 15\,625$ Hz, nous sommes dans un domaine ou l'oreille humaine est peu sensible. De plus, si l'on tient compte de la bande passante des haut-parleurs d'un poste de télévision (entre 100 Hz et 10 kHz), ce signal devient totalement inaudible. Il faut plutôt y voir une technique de compression des données (avant l'heure du JPEG et autre MP3) permettant de réduire la quantité d'information à transmettre. Le tuner se chargeant ensuite d'extraire le signal de synchronisation du signal audio.

Quand on applique notre procédé de décryptage, cette raie de fréquence $f_L = 15\,625$ Hz subit elle aussi des transformations. La modulation par notre signal sinusoïdal de fréquence $f_P = 12\,800$ Hz engendre deux nouvelles raies de fréquence :

$$f_{L-} = f_L - f_p = 2\,825\text{ Hz} \quad \text{et} \quad f_{L+} = f_P + f_L = 28\,425\text{ Hz}$$

Remarque : L'inversion de la formule $f_{L-} = f_L - f_P$ au lieu de $f_{L-} = f_P - f_L$ permet de conserver une fréquence positive. C'est bien sûr cohérent d'un point de vu mathématique car $\cos(-x) = \cos(x)$ mais surtout, cela s'apparente une fois de plus à un repliement du spectre, cette fois autour de la valeur 0 Hz.

C'est cette nouvelle raie de fréquence $f_{L-} = 2\,825$ Hz qui est responsable du léger sifflement présent dans le signal sonore décrypté. Et, même si on ne l'observe pas sur le spectre décodé (car elle est noyée dans l'ensemble du spectre en raison de sa faible amplitude), cette raie existe toujours et explique notre sifflement. Pour s'en convaincre, montrons le résultat de la modulation d'un spectre crypté sur lequel on a fortement augmenté l'amplitude de ce pic.



Spectre et sonagramme du son crypté. *Spectre et sonagramme du son décrypté.*

On voit très nettement, sur le spectre du son décrypté, la raie de fréquence $f_{L-} = 2\,825$ Hz responsable de notre sifflement (très intense à l'écoute de ce fichier). De plus, on observe aussi la deuxième raie quasi inaudible, placée à $f^*_{L+} = f_E - f_{L+}$, soit $f^*_{L+} = 44\,100 - 28\,425 = 15675$ Hz en raison du repliement du spectre autour de 22 050 Hz (*cf.* § 3.2.2.).

Remarque : Le renforcement de la raie de fréquence $f_L = 15\,625$ Hz s'est effectué par : Tools → Expression evaluator ; et une formule de la forme $wave(n) + \cos(2\pi \cdot f \cdot t)$. Nous verrons qu'il existe un autre moyen pour favoriser une fréquence dans le spectre (*cf.* § 3.4.2.).

3.4.2. Correction du sifflement

Pour supprimer ce sifflement, il suffit d'éliminer la raie de fréquence f_L = 15 625 Hz avant la modulation. Ce genre d'opération nécessite, soit un filtre coupe-bande centré sur 15 625 Hz, soit un filtre passe-bas ne laissant rien passer au dessus de 14 kHz (par exemple). GoldWave dispose (entre autre) d'un « équaliseur » à 30 bandes entièrement paramétrable permettant de réaliser n'importe quel type de filtre (passif ou actif).

Dans notre cas, nous allons réaliser un filtrage ciblé du signal crypté par un filtre coupe-bande.



Étape 1

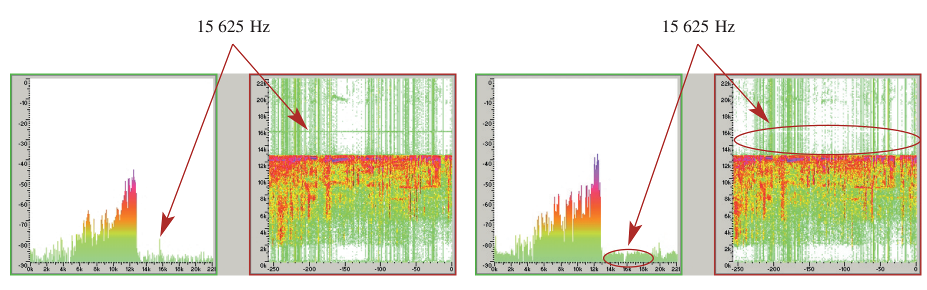
Filtre coupe-bande :
Effects → Filters → Parametric EQ

Le filtre est réglé sur la bande n° 10 centrée sur 15 625 Hz. La largeur de la bande est de 20 Hz et son gain a été choisi à – 30 dB. Il s'agit donc d'un filtre très sélectif que seul le traitement numérique permet de réaliser avec autant de facilité.

Étape 1

<u>*Remarque*</u> *:* Le filtrage doit nécessairement être réalisé avant la modulation. Car, après, il serait impossible d'éliminer la raie de fréquence 2 825 Hz sans modifier en même temps le son.

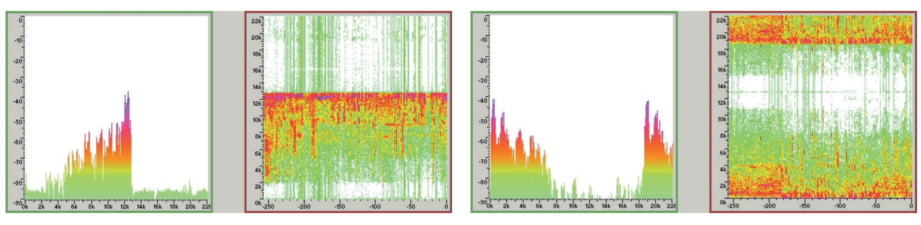
La comparaison entre les spectres avant et après le passage par le filtre confirme l'effet attendu.



Spectre et sonagramme du son crypté avant le filtre.

Spectre et sonagramme du son crypté après le filtre.

Il y a bien disparition de la raie placée à 15 625 Hz. Décrypter le son est maintenant un jeu d'enfant, on procède encore une fois à la modulation entre le signal filtré et la porteuse de fréquence $f_P = 12\,800$ Hz.



Spectre et sonagramme du son crypté filtré. *Spectre et sonagramme du son filtré et décrypté.*

À l'écoute, le résultat est parfait et il n'y a plus de sifflement intempestif. Nous sommes proches de l'objectif final.

3.4.3. Les dernières retouches

Il est tout à fait possible de s'arrêter là. Mais, quand on dispose d'outils aussi performants dans le traitement du son, il serait dommage de ne pas améliorer le son décrypté. Pour cela, deux étapes sont encore nécessaires :



Étape 1

Filtre passe-bas par : **Effects → Filters → Parametric EQ**

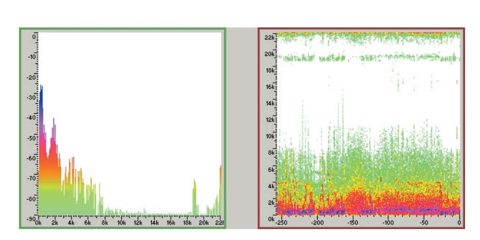
Afin d'éliminer le spectre somme du son décrypté. Le filtre est maintenant réglé sur une bande centrée sur 20 000 Hz. Sa largeur est de 8 000 Hz et son gain a été choisi à – 60 dB.



Étape 2

Augmenter le volume par :
Effects → Volume → Maximize

Le passage par différents filtres ayant diminué notablement le volume du son, il faut donc procéder à une augmentation. GoldWave calcule alors automatiquement le facteur multiplicatif ; validez. Il ne reste alors plus qu'à visualiser et écouter le résultat…



Spectre et sonagramme du son finalisé.

4. QUELQUES QUESTIONS PRATIQUES

Pour finir cet article, nous allons aborder quelques points pratiques qui n'ont pas été développés jusqu'ici.

4.1. Pourquoi moduler à 12 800 Hz ?

Il peut sembler arbitraire d'avoir choisi comme porteuse un signal de fréquence $f_P = 12\,800$ Hz, mais cela se justifie par deux raisons essentielles :

– Dans un premier temps en raison de la nature du signal à crypter et de son mode de transmission.
– Ensuite pour des raisons de coût et de simplicité technique.

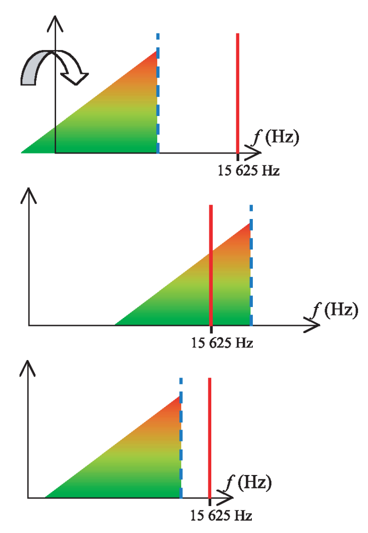
En effet, rappelons que le signal audio transmis contient non seulement le son proprement dit mais aussi le signal de synchronisation des lignes avec une fréquence $f_L = 15\,625$ Hz (*cf.* § 3.4.1.). Afin d'éviter des interférences, le spectre crypté doit avoir un domaine de fréquence compris entre 0 Hz et, au maximum, 15 625 Hz.

Compte tenu de la largeur fréquentielle du spectre sonore à coder (0 ~ 10 kHz), la fréquence de la porteuse doit forcément être comprise entre 10 kHz et environ 15 kHz. Clarifions ces propos :

♦ Si la fréquence de la porteuse $f_P < 10\,000$ Hz, il y aura repliement du spectre autour de 0 Hz et mélange d'information. Il ne sera plus possible de revenir en arrière pendant le décryptage.

♦ Si la fréquence de la porteuse $f_P > 15\,625$ Hz, alors le spectre retourné et le signal de synchronisation ligne se superposent. Il ne sera plus possible de les séparer par la suite.

♦ Avec une fréquence de porteuse $10\,000 \text{ Hz} < f_P < 15\,625$ Hz, le spectre se trouve alors idéalement placé. Le choix logique se trouvant au centre de cette plage, soit environ à 12 800 Hz.



De plus, que ce soit pour le cryptage ou le décryptage, on a besoin d'avoir une porteuse dont la fréquence soit stable, facile à reproduire techniquement et peu coûteuse à fabriquer. Ces contraintes ont conduit à choisir la même technologie que celle des montres et autres horloges électroniques. À savoir, un montage basé sur un quartz suivi d'une série de diviseurs de fréquence par deux.

Quartz horloge

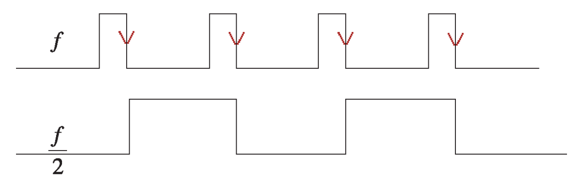
Précisons que, pour un signal d'horloge de période $T_H = 1$ s, on utilise généralement un quartz à 32 768 Hz suivi de 15 diviseurs de fréquence par deux $\left(f_H = \dfrac{32\,768}{2^{15}} = 1 \text{ Hz} \right)$.

Pour notre porteuse de fréquence $f_P = 12\,800$ Hz, il faut alors prendre un quartz 3,2768 MHz suivi de 8 diviseurs de fréquence par deux $\left(f_P = \dfrac{3{,}2768 \cdot 10^6}{2^8} = 12\,800 \text{ Hz} \right)$.

Remarques :

– Comme il n'est techniquement pas possible de fabriquer des quartz basse fréquence, l'obtention de signaux BF et TBF stables ne peut se faire qu'avec des quartz de fréquences élevées suivis d'une série de diviseurs de fréquence.

– Les diviseurs de fréquence par deux utilisent des bascules J-K réagissant sur les fronts descendants du signal d'horloge.



À chaque front descendant, la bascule J-K *change d'état et divise ainsi la fréquence par deux.*

– Il faut aussi noter que le signal d'horloge ainsi réalisé n'est pas sinusoïdal, mais carré avec un rapport cyclique de 0,5. Il est alors légitime de se demander si le décryptage reste réalisable.

4.2. Peut on utiliser cette horloge fournissant des signaux carrés ?

Pour répondre à cette question, il faut avant tout faire quelques petits rappels essentiels sur l'analyse de Fourier. Celle-ci indique qu'une fonction $y(t)$ périodique de fréquence f peut s'écrire comme une somme de fonctions périodiques *sinus* et *cosinus*.

Soit :
$$y(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi \cdot n \cdot f \cdot t) + b_0 \sin(2\pi \cdot n \cdot f \cdot t)$$

Avec a_0, a_n et b_n des coefficients appelés *coefficients de Fourier* de la fonction $y(t)$.

Le calcul des coefficients de Fourier sortant du cadre de cet article, nous préciserons juste quelques points particuliers :

- Le coefficient a_0 représente la valeur moyenne de la fonction sur une période. Il se calcule donc par : $a_0 = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_0^T y(t)\, dt$.
- Pour une fonction paire, $y(t) = y(-t)$; seuls les termes en *cosinus* subsistent $\Rightarrow b_n = 0$.
- Pour une fonction impaire, $y(t) = -y(-t)$; seuls les termes en *sinus* subsistent $\Rightarrow a_n = 0$.
- L'ensemble des coefficients a_0, a_n et b_n forment le spectre de la fonction périodique $y(t)$.
- La fréquence de chaque composante n est un multiple de la fréquence f de $y(t)$, à savoir $f_n = n \cdot f$. Le premier terme de la série ($n = 1$) s'appelle le *fondamental* ou *l'harmonique de rang* 1.

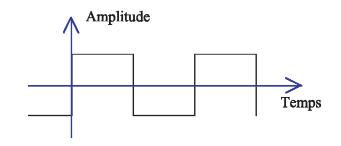
Pour prendre un exemple utile par la suite, traitons le cas du signal carré de fréquence f à valeur moyenne nulle.

Les coefficients de Fourier de ce signal sont :

– $a_0 = 0$ car la valeur moyenne est nulle.

– $a_n = 0$ car la fonction est impaire.

– $b_1 = 1$; $b_2 = 0$; $b_3 = \frac{1}{3}$; $b_4 = 0$; $b_5 = \frac{1}{5}$; etc.



Soit pour n paire $b_n = 0$, et pour n impaire $b_n = \frac{1}{n}$.

Remarque : Les amplitudes sont données en valeur relative par rapport au premier terme de la série.

Notre fonction carrée peut alors s'écrire sous la forme :

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi \cdot n \cdot f \cdot t)$$

ou $$y(t) = \sin(2\pi \cdot f \cdot t) + \frac{1}{3}\sin(2\pi \cdot 3 \cdot f \cdot t) + \frac{1}{5}\sin(2\pi \cdot 5 \cdot f \cdot t) + ...$$

Amplitude relative

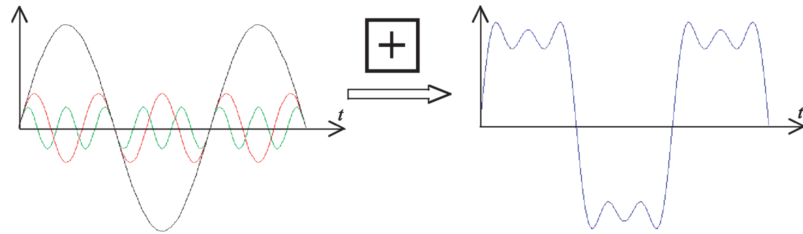
1

Fréquence

f $3f$ $5f$

Spectre du signal carré (les trois premières composantes).

La représentation graphique des trois premières composantes et de leur somme suffit à nous montrer que l'on commence à reconstituer le signal carré initial.



La conséquence directe de ce qui vient d'être expliqué peut s'énoncer comme suit : Moduler un signal $S(t)$ par une porteuse $P(t)$ en créneau revient à faire le produit du signal $S(t)$ avec toutes les composantes de Fourier de la porteuse.

Le signal modulé $M(t)$ prend alors la forme suivante :

$$M(t) = S(t) \cdot P(t) = S(t) \cdot \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi \cdot n \cdot f \cdot t) + b_n \sin(2\pi \cdot n \cdot f \cdot t) \right]$$

Ce qui donne avec la porteuse $P(t)$ en créneau de fréquence f :

$$M(t) = S(t) \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi \cdot n \cdot f \cdot t) \right]$$

$$= S(t) \cdot \left[b_1 \sin(2\pi \cdot f \cdot t) + \frac{b_1}{3}\sin(2\pi \cdot 3 \cdot f \cdot t) + \frac{b_1}{5}\sin(2\pi \cdot 5 \cdot f \cdot t) + ... \right]$$

Le spectre du signal modulé $M(t)$ est alors constitué des spectres sommes et différences placés de façon symétrique par rapport à chaque fréquence f_n de la porteuse $P(t)$ (*cf.* § 3.1.2.).

Afin d'illustrer ces propos, réalisons sur GoldWave la modulation entre :

– un signal $S(t)$ complexe comportant deux composantes (500 Hz et 1 000 Hz) de la forme : $S(t) = 0{,}4 \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t) + 0{,}05 \cdot \sin(2\pi \cdot 2 \cdot f \cdot t)$, avec $f = 500$ Hz ;

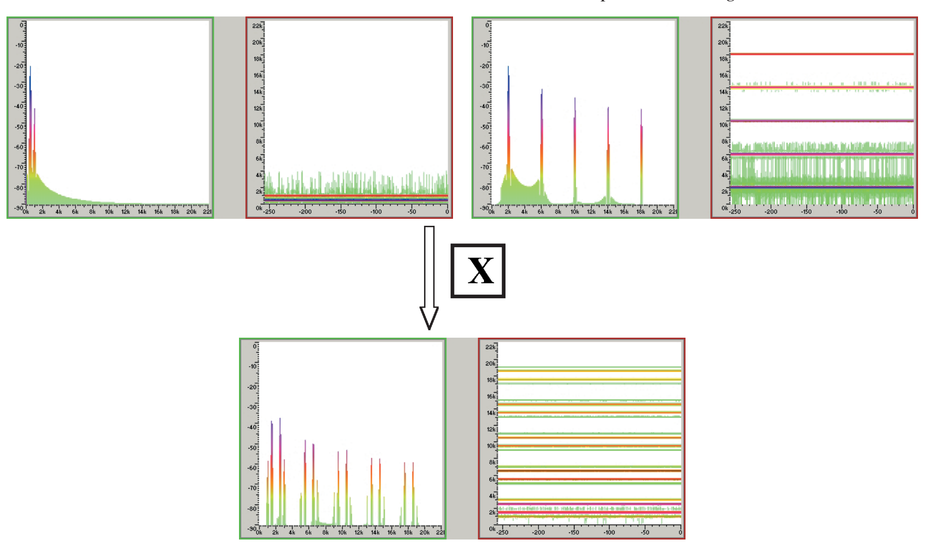
– et les cinq premières composantes d'un signal carré de fréquence $f_P = 2\,000$ Hz, soit :

$$P(t) = 0{,}5 \cdot \sin(2\pi \cdot f_P \cdot t) + \frac{0{,}5}{3} \cdot \sin(2\pi \cdot 3 \cdot f_P \cdot t) + \frac{0{,}5}{5} \cdot \sin(2\pi \cdot 5 \cdot f_P \cdot t)$$

$$+ \frac{0{,}5}{7} \cdot \sin(2\pi \cdot 7 \cdot f_P \cdot t) + \frac{0{,}5}{9} \cdot \sin(2\pi \cdot 9 \cdot f_P \cdot t)$$

Remarque : Pour éviter les problèmes de repliement de spectre sur les signaux numérisés ; il faut, dans ce cas, se limiter aux cinq premières composantes de la porteuse.

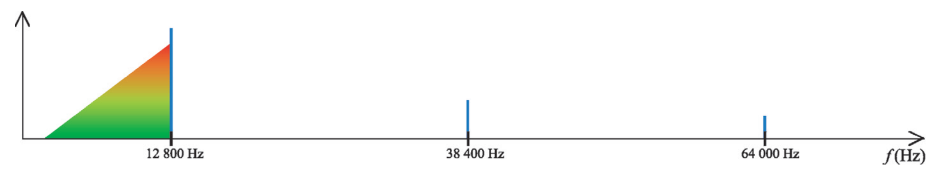
Spectre et sonagramme du son crypté complexe. *Spectre et sonagramme des cinq premières composantes du signal carré.*



Spectre et sonagramme du son modulé par le signal carré.

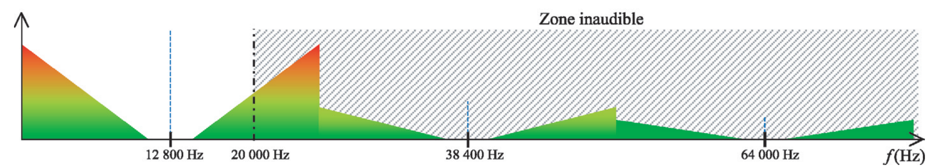
Le spectre du signal modulé nous montre bien la répartition symétrique des spectres sommes et différences autour des fréquences de chaque composante de la porteuse.

Grâce à cet exemple, il devient assez facile de prévoir le résultat obtenu lors de la modulation entre le son crypté et une porteuse en créneau de fréquence $f_P = 12\,800$ Hz. Il s'agit, là encore, de faire le produit entre le signal et chaque composante de la porteuse de fréquence (12 800 Hz ; 3 × 12 800 = 38 400 Hz ; 5 × 12 800 = 64 000 Hz ; etc.).



Spectre du son crypté et de la porteuse en créneau de fréquence f_P = 12 800 Hz.

Le signal obtenu contient toujours le son décodé correspondant au retournement du spectre par la première composante, mais, il y a aussi tous les autres spectres attendus autour des fréquences supérieures (38 400 Hz ; 64 000 Hz ; etc.).



Spectre du son décrypté par modulation avec une porteuse en créneau de fréquence f_P = 12 800 Hz.

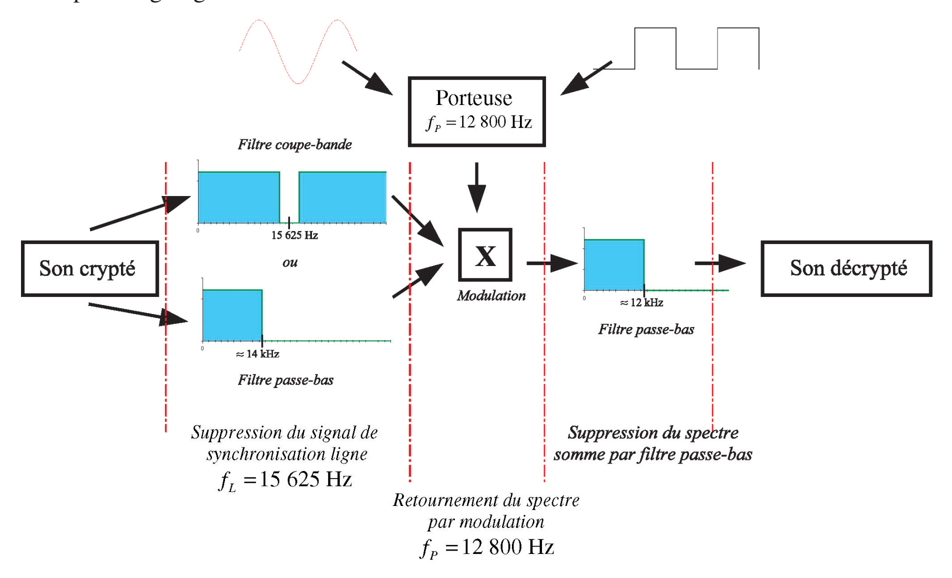
Malgré la présence de tous ces spectres « miroir », le résultat auditif reste identique à celui obtenu par modulation avec une porteuse sinusoïdale de fréquence f_P = 12 800 Hz. En effet, l'oreille humaine ne pouvant entendre les fréquences supérieures à 20 kHz, en plus du son décrypté, seule une petite partie du premier spectre somme pourra éventuellement être audible.

Remarques :

- Précisons que pour rendre la première partie du spectre somme audible, le son devrait être restitué par un matériel audio Hi-Fi ; c'est-à-dire ayant une réponse jusqu'à 20 kHz. Ce n'est pas le cas général des télévisions.
- Dans ce cas, pour parfaire le son décrypté, il suffit de le faire passer par un filtre passe-bas de fréquence de coupure proche de 12 kHz (*cf.* § 3.4.3.).

4.3. La chaîne de décryptage

L'ensemble des opérations nécessaires pour décrypter le son codé peut se schématiser par l'organigramme suivant :



CONCLUSION

L'étude du cryptage du son fait partie de ces situations un peu inédites permettant d'aborder de nombreuses notions allant de la physiologie humaine jusqu'au traitement du signal.

Le côté « innovant » et la multiplicité des domaines ainsi couverts offrent la possibilité de construire de nombreuses séquences pédagogiques permettant d'éveiller ou d'approfondir les connaissances des étudiants en les rendant acteurs de leur progression.

L'utilisation de l'outil informatique s'avère une fois de plus indispensable, mais son rôle dans cette étude est double. Cela reste un moyen d'acquisition et de calcul sans commune mesure avec les méthodes traditionnelles, mais c'est aussi, et surtout, un formidable outil permettant de développer le sens de l'analyse et de la réflexion.

Cet article se veut également une invitation. En effet, entre Internet, les cédéroms fournis par les revues et l'entourage, nous voyons tous de très nombreux logiciels (en freeware (2) ou shareware), sans pour autant y prêter attention. Parmi ceux-ci se trouve parfois une « perle rare », exploitable en physique ou en chimie, qui mérite alors d'être connue par tous.

(2) Freeware (français : Gratuiciel) : Logiciel totalement gratuit contrairement au shareware qu'il faut payer si on l'utilise.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AUBERT D. et QUARANTA L. *Dictionnaire de physique expérimentale* : Tome III L'électronique. Ed. Pierron, 1992, (p. 47-51 ; 142-144 ; 164-186 ; 217-221.

[2] ESQUIEU J. Traitement numérique du signal. *Bull. Un. Phys.*, mai 1993, vol. 87, n° 754, p. 707-729.

[3] ESQUIEU J. Analyse spectrale numérique. *Bull. Un. Phys.*, mai 1993, vol. 87, n° 754, p. 775-797.

[4] TOURNIER R. Télévision. *Bull. Un. Phys.*, juillet-août-septembre 1994, vol. 88, n° 766, p. 1165-1178.

[5] BRUNET P. Utilisation d'un analyseur de spectre associé à un système d'acquisition de données. *Bull. Un. Phys.*, novembre 1994, vol. 88, n° 768, p. 1527-1549.

[6] CHATAIN D., FAGOT B. et LE GOFF R. De la télévision. *Bull. Un. Phys.*, mars 1995, vol. 89, n° 772, p. 487-534.

[7] DEIBER A., KEMPF O. et le Groupe-GRESEP. Autopsie d'une image. *Bull. Un. Phys.*, mai 1996, vol. 90, n° 784, p. 857-873.

[8] Encyclopédie Universalis
Mots-clés : Acoustique, Télévision, Fourier, Enregistrement numérique.

[9] HPrépa : électronique I. 2de année PSI-PSI* sous la direction de Jean-Marie BREBEC. Ed. Hachette Supérieur, 1997, p. 230-239.

[10] PEREZ J.-P. *Optique géométrique et ondulatoire.* 4e édition, Ed Masson, 1994, p. 423-427.

[11] MENETRIER M., GIRIN P., IDDA H. et FANGUET M. *Hprépa édition spéciale : Physique MPSI-PCSI-PTSI*, Ed. Hachette Supérieur, 2003, p. 152-163.

[12] Dictionnaire de l'informatique et d'internet : `http://www.dicofr.com`
Mots-clés : Shareware, Freeware.



Hervé IDDA
Professeur en PCSI
Lycée Paul Cézanne
Aix-en-Provence (Bouches-du-Rhône)

Cet article comporte un complément nommé :

- *08720319son.mp3*

Il est disponible sous la forme d'un fichier zippé : 08720319.zip

Annexe 1
Téléchargement

GoldWave 4.26 n'est pas un logiciel gratuit mais un shareware fonctionnant sous Windows (toutes versions). On peut donc le télécharger et l'installer librement sur son ordinateur afin de pouvoir le tester. À chaque fois que vous lancez le logiciel, vous pouvez accéder à toutes ses fonctions et ceci librement pendant 150 « actions » avant de voir apparaître régulièrement une fenêtre vous offrant la possibilité de l'acheter.

Pour le télécharger, aller à cette adresse :

`http://www.goldwave.com/release426.php`

Puis cliquer sur : Self-Installing GoldWave v4.26

Ensuite l'installation se déroule en anglais après avoir lancé gwave426.exe.

Remarque : Il est possible de sauvegarder des fichiers sonores au format « MPEG » (*.mp3) avec Goldwave ; pour cela, il suffit de télécharger et d'installer un petit programme en freeware nommé lamewin32.exe (l'adresse de téléchargement est accessible directement sur le site de Goldwave).

Annexe 2
Lecture et enregistrement

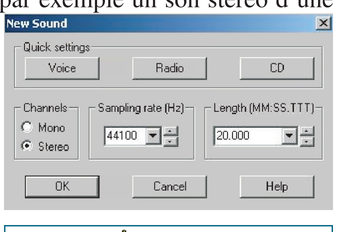
Précisons que tout ordinateur muni d'une carte « son » permet de faire les manipulations de cet article.

Une fois GoldWave ouvert, il faut commencer par créer un nouveau fichier son.



Étape 1

Créer le fichier son par : **File → New**. Puis choisir par exemple un son stéréo d'une durée de 20 s avec une fréquence d'échantillonnage de 44 100 Hz.



Étape 1

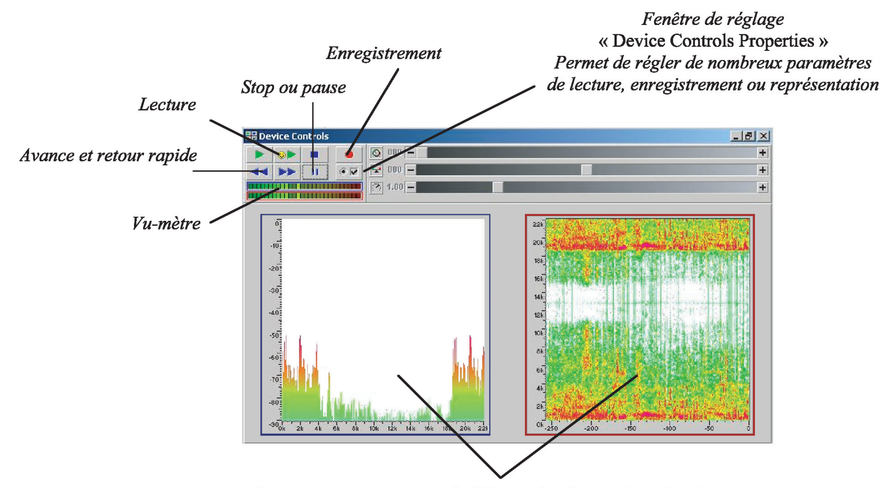
Remarque : Le mode stéréo n'est pas indispensable ici, mais il permet de visualiser simultanément le spectre d'une voie et le sonagramme de l'autre voie.

Pour la suite, toutes les fonctions d'enregistrement et de lecture se font par l'intermédiaire d'une fenêtre nommée « Device Controls ».



Étape 2

L'accès à cette fenêtre se fait par : **Tools → Device controls**.

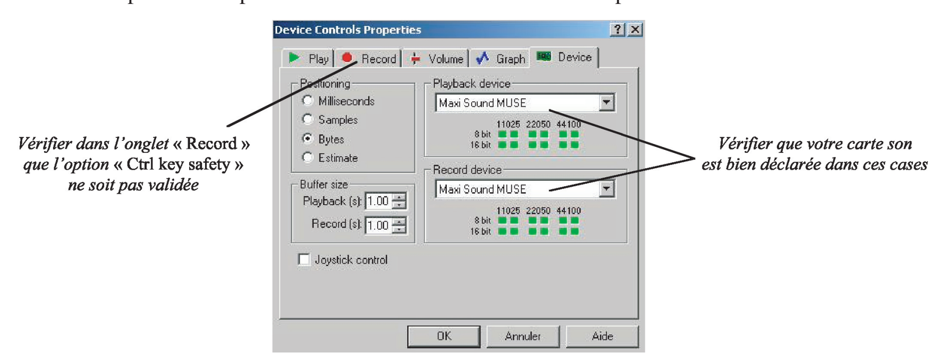


Spectre, sonagramme, mode X-Y, amplitude, etc. (pour les deux voies).
Il suffit de cliquer dessus pour changer le mode de représentation.

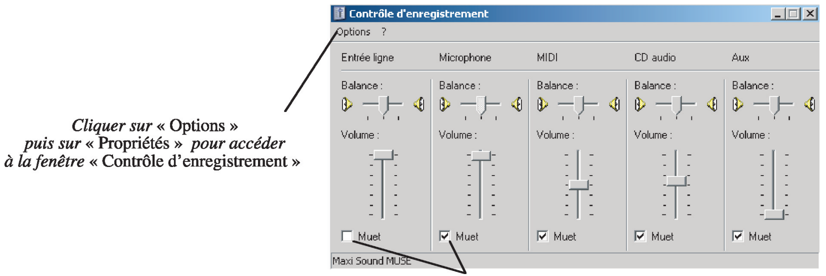
L'enregistrement se fait directement dans votre fichier son après avoir appuyé sur l'icône enregistrement de la fenêtre « Device Controls ».

Remarque : Si votre enregistrement ne se fait pas, il faut vérifier un certain nombre de paramètres :

♦ Dans un premier temps dans la fenêtre « Device Controls Properties » :



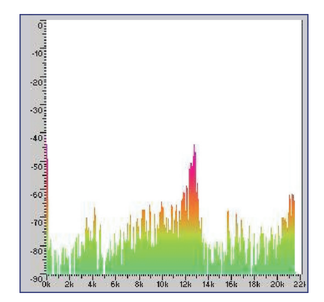
♦ Dans un deuxième temps dans la fenêtre « Contrôle d'enregistrement » de Windows accessible directement depuis GoldWave par : **Tools → Volume control**.



Vous devez spécifier quel type d'entrée de votre carte son vous voulez utiliser pour l'enregistrement

Dans le cadre de cet article, les enregistrements des chaînes de télévision ont été réalisés par l'intermédiaire d'une carte « TV » d'ordinateur dont la sortie audio était directement branchée sur l'entrée ligne de la carte « son ».

Il est aussi possible d'utiliser la sortie audio (sortie « casque ») de la télévision branchée sur l'entrée ligne de la carte son ou de se servir d'un microphone placé devant le haut-parleur du poste de télévision.



Spectre obtenu par acquisition sur la sortie « casque » du poste de télévision.

Mais, dans ces deux cas, il est difficile d'obtenir un signal de bonne qualité en raison de la proximité du poste et des nombreuses pollutions électromagnétiques associées (présence de bruit et de nombreuses raies parasites).

Pour finir, il reste la possibilité de prélever directement le son à la sortie d'un magnétoscope (par exemple sur la prise péritel). Le signal ainsi obtenu est de très bonne qualité mais le magnétoscope peut jouer le rôle d'un filtre passe-bas sur le signal…

Conseil : Sauvegarder vos fichiers son au format « Wave » (*.wav). En effet, les formats compressés comme le « MPEG » (*.mp3) engendrent quelques pertes qui peuvent modifier notablement le spectre de votre signal.